Ad-soyad :

Numara : Cevap Anahtarı

<u>Lineer Cebir I Ara Sınav Soruları</u> **30.11.2023**

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(D) A kare matris ise $A - A^T$ ters simetrik matristir (~~2~~ 4 p).

(Y) Tek tamsayılar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte bir cisimdir (~~2~~ 4 p).

(D) Homojen lineer denklem sistemleri her zaman çözülebilir (~~2~~ 4 p).

(D) $n \geq 2$ için n elemanlı bir kümenin permütasyonlarının yarısı çift yarısı tektir (~~2~~ 4 p).

(Y) S_1 ve S_2, AX=B lineer denklem sisteminin çözümü ise $S_1 + S_2$ de bir çözümdür (~~2~~ 4 p).

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor (20 p).

a) $AB = ?$ $\begin{bmatrix} 6 \\ -13 \end{bmatrix}$ b) $CA = ?$ $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ c) $D^T A^T = ?$ d) $B^T D = ?$ $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 10 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 26 & 9 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor.

a) $\left[A \mid I_3 \right]$ matrisinin satırca indirgenmiş basamaklı biçimini bulunuz (10 p).

b) A^{-1} var mıdır? Nedenini açıklayınız. Varsa A^{-1}=? (5 p)

c) AX=B denklemini çözünüz (5 p).

4) $\begin{cases} 2x - y + 2az + t = b \\ -2x + ay - 3z - t = 4 \\ 2x - y + (2a+1)z + (a+1)t = 0 \\ -2x + y + (1-2a)z - 2t = b - 2 \end{cases}$ lineer denklem sisteminin

a) tek çözümünün (7p), b) çözümsüz (~~6~~ 7p), c) sonsuz çözümünün olması için a ve b reel sayılarını belirleyiniz (6p).

5) a) $\prod = (1,\ 3,\ 2,\ 4)$, $\sigma = (1,\ 7,\ 6,\ 2) \in S_7$ permütasyonları için $\prod\sigma$ ve $\sigma\prod$ permütasyonlarını hesaplayınız. $\prod\sigma = \sigma\prod$ midir? (10 p)

b) AB=BA ise A matrisi B matrisi ile değişmelidir denir. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile değişmeli olan tüm 2x2 lik matrisleri bulunuz (10 p).

3) a) $[A\,|\,I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_3]{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_2}{2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow[2R_2+R_3]{R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_3}{2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$

b) $A \sim I_3$ olup A^{-1} vardır. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

c) $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}X = A^{-1}B$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1 & -1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$

4) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ -2 & a & -3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 2a+1 & a+1 & 0 \\ -2 & 1 & 1-2a & -2 & b-2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-R_1+R_3 \\ R_1+R_4}]{R_1+R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ 0 & a-1 & 2a-3 & 0 & b+4 \\ 0 & 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2b-2 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_3+R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ 0 & a-1 & 2a-3 & 0 & b+4 \\ 0 & 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a-1 & 3b-2 \end{array}\right]$

a) $a-1 \neq 0$ ve $-a-1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \mp 1$ için tüm değişkenler temel değişken olup tek çözüm vardır.

b) $-a-1 = 0$ ve $3b-2 \neq 0 \Rightarrow a = -1$ ve $b \neq \frac{2}{3}$ için son satır kötü satır olup çözüm yoktur.

c) $-a-1 = 0$ ve $3b-2 = 0 \Rightarrow a = -1$ ve $b = \frac{2}{3}$ için t bağımsız değişken olur ve sonsuz çözüm vardır.

5) a) $\pi\sigma = (1,3,2,4)(1,7,6,2) = (1,7,6,4)(3,2)$

$\sigma\pi = (1,7,6,2)(1,3,2,4) = (1,3)(2,4,7,6)$ $\Big\}$ $\pi\sigma \neq \sigma\pi$

b) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun.

$AB = BA$ ve $AC = CA$ olmasını istiyoruz.

$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = BA \Leftrightarrow b = c = 0 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ şeklinde olmalıdır

$AC = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$AC = CA \Leftrightarrow a = d \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ şeklinde olmalıdır

$\therefore$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri ile değişmeli olan 2x2 lik matrisler

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ şeklindedir.